

# §12. Chia đa thức một biến đã sắp xếp

## 1. Phép chia hết

Ví dụ 1: Chia đa thức

$(2x^4 - 13x^3 + 15x^2 + 11x - 3)$  cho đa thức  $(x^2 - 4x - 3)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 13x^3 + 15x^2 + 11x - 3 & x^2 - 4x - 3 \\ - 2x^4 + 8x^3 + 6x^2 & \hline - 5x^3 + 21x^2 + 11x - 3 & \\ 5x^3 - 20x^2 - 15x & \hline x^2 - 4x - 3 & \\ - x^2 + 4x + 3 & \hline 0 & \end{array}$$

- Khi đó:  $(2x^2 - 5x + 1)$  gọi là thương của phép chia

$(2x^4 - 13x^3 + 15x^2 + 11x - 3)$  cho  $(x^2 - 4x - 3)$ .

- Phép chia có dư bằng 0 là phép chia hết.

## 2. Phép chia có dư

Ví dụ 2: Thực hiện phép chia đa thức  $(5x^3 - 3x^2 + 7)$  cho đa thức  $(x^2 + 1)$ .

(SGK)

$$\begin{array}{r|l} 5x^3 - 3x^2 + 7 & x^2 + 1 \\ - 5x^3 + 5x & \hline - 3x^2 + 5x + 7 & \\ 3x^2 - 3 & \hline - 5x + 10 & \end{array}$$

► **Chú ý:** Với hai đa thức tùy ý  $A$  và  $B$  của cùng một biến ( $B \neq 0$ ), tồn tại duy nhất một cặp đa thức  $Q$  và  $R$  sao cho:

$$A = B \cdot Q + R$$

- Khi  $R = 0$  phép chia  $A$  cho  $B$  là phép chia hết.

- Khi  $R \neq 0$  và bậc của  $R$  nhỏ hơn bậc của  $B$ ,  $R$  được gọi là dư trong phép chia  $A$  cho  $B$ .

# CHƯƠNG II – PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

## §1. Phân thức đại số

### 1. Định nghĩa

Một phân thức đại số (hay nói gọn là phân thức) là một biểu thức có dạng  $\frac{A}{B}$ , trong đó  $A, B$  là những đa thức và  $B$  khác đa thức 0.

$A$  được gọi là tử thức (hay tử),  $B$  được gọi là mẫu thức (hay mẫu)

Ví dụ:

$$\frac{4x-7}{2x^3+4x-5}; \frac{x-12}{1}$$

► **Chú ý:**

- Mỗi đa thức cũng là một phân thức với mẫu thức bằng 1.

- Số 0, số 1 cũng là những phân thức đại số.

### 2. Hai phân thức bằng nhau

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ nếu } A.D = B.C$$

Ví dụ:  $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$

Vì  $(x-1)(x+1) = 1(x^2-1)$

## §2. Tính chất cơ bản của phân thức

### 1. Tính chất cơ bản của phân thức

Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức bằng với phân thức đã cho.

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \quad (M \text{ là một đa thức khác đa thức } 0)$$

Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho.

$$\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N} \quad (N \text{ là một nhân tử chung})$$

### 2. Quy tắc đổi dấu

Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của một phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$$

## §2. Tính chất cơ bản của phân thức đại số (tt)

### 1. Nhân xét

$$\frac{4x^3 : 2x^2}{10x^2 y : 2x^2} = \frac{2x}{5y}$$

$$\frac{5x+10}{25x^2+50x} = \frac{5(x+2)}{25x(x+2)} = \frac{1}{5x}$$

**Nhận xét.** Muốn rút gọn một phân thức ta có thể:

- Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung.
- Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

**Chú ý:** Có đôi khi cần đổi dấu ở tử hoặc mẫu để nhận ra nhân tử chung của tử và mẫu (lưu ý tới tính chất  $A = -(-A)$ ).

Ví dụ 2. Rút gọn phân thức

$$\frac{1-x}{x(x-1)}$$

**Giải**

$$\frac{1-x}{x(x-1)} = \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{-1}{x}$$

## §4. Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

Quy đồng mẫu nhiều phân thức là biến đổi các phân thức đã cho thành những phân thức mới có cùng mẫu thức và lần lượt bằng các phân thức đã cho.

### 1. Tìm mẫu thức chung

**Ví dụ 1.** Tìm mẫu thức chung của hai phân thức:

$$\frac{1}{4x^2 - 8x + 4} \text{ và } \frac{5}{6x^2 - 6x}$$

**Giải**

- Phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

$$4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 4(x - 1)^2;$$

$$6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

- MTC:  $12x(x - 1)^2$

\* **Muốn tìm mẫu thức chung của nhiều phân thức ta làm như sau:**

- Phân tích mẫu thức của các phân thức đã cho thành nhân tử;

- Mẫu thức chung cần tìm là một tích mà các nhân tử được chọn như sau:

+ Nhân tử bằng số của mẫu thức chung là tích các nhân tử bằng số ở các mẫu thức của các phân thức đã cho. (Nếu các nhân tử bằng số ở các mẫu thức là những số nguyên dương thì nhân tử bằng số của mẫu thức chung là BCNN của chúng);

+ Với mỗi lũy thừa của cùng một biểu thức có mặt trong các mẫu thức, ta chọn lũy thừa với số mũ cao nhất.

### 2. Quy đồng mẫu thức

**Ví dụ 2.** Quy đồng mẫu thức hai phân thức

$$\frac{1}{4x^2 - 8x + 4} \text{ và } \frac{5}{6x^2 - 6x}$$

**Giải**

$$\text{MTC} = 12x(x - 1)^2$$

$4x^2 - 8x + 4$  có nhân tử phụ là  $3x$ ;

$6x^2$  - nhân tử phụ là

$$2(x - 1)$$

Vậy:

$$\frac{1}{4x^2 - 8x + 4} = \frac{1}{4(x - 1)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot 3x}{4(x - 1)^2 \cdot 3x} = \frac{3x}{12x(x - 1)^2}$$

$$\frac{5}{6x^2 - 6x} = \frac{5}{6x(x-1)}$$
$$= \frac{5 \cdot 2(x-1)}{6x(x-1) \cdot 2(x-1)} = \frac{10(x-1)}{12x(x-1)^2}$$

**Quy tắc:**

Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ta có thể làm như sau:

- Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung;
- Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức;
- Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

# §5. Phép cộng các phân thức đại số

## 1. Cộng hai phân thức cùng mẫu

### Quy tắc

Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức

Ví dụ 1. Cộng hai phân thức:

$$\frac{x^2}{3x+6} + \frac{4x+4}{3x+6}$$

$$\frac{x^2}{3x+6} + \frac{4x+4}{3x+6} = \frac{x^2+4x+4}{3x+6}$$

### Giải

$$= \frac{(x+2)^2}{3(x+2)} = \frac{x+2}{3}$$

## 2. Cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau

### Quy tắc

Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

Ví dụ 2. Làm tính cộng:

$$\frac{x+1}{2x-2} + \frac{-2x}{x^2-1}$$

### Giải

$$\begin{aligned} 2x-2 &= 2(x-1) \\ x^2-1 &= (x-1)(x+1) \end{aligned}$$

$$\text{MTC} = 2(x-1)(x+1)$$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2x-2} + \frac{-2x}{x^2-1} &= \\ &= \frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{-2x}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(x+1)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} + \frac{2 \cdot (-2x)}{2(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(x+1)^2 - 4x}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{2(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{2(x-1)(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x-1}{2(x+1)} \end{aligned}$$

► **Chú ý.** Phép cộng các phân thức cũng có các tính chất sau:

1) Giao hoán:  $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$

2) Kết hợp:

$$\left( \frac{A}{B} + \frac{C}{D} \right) + \frac{E}{F} = \frac{A}{B} + \left( \frac{C}{D} + \frac{E}{F} \right)$$

## §6. Phép trừ các phân thức đại số

### 1. Phân thức đối

Hai phân thức được gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0

Ví dụ:

$\frac{-3}{x+1}$  là phân thức đối của  $\frac{3}{x+1}$

\* Phân thức đối của phân thức  $\frac{A}{B}$  được kí hiệu là  $\frac{-A}{B}$

\* Quy tắc đổi dấu:

$$\boxed{-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} \text{ và } -\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}}$$

### 2. Phép trừ

Quy tắc

Muốn trừ phân thức  $\frac{A}{B}$  cho phân thức  $\frac{C}{D}$ , ta cộng  $\frac{A}{B}$  với phân thức đối của  $\frac{C}{D}$ :

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right)$$

Ví dụ.

(SGK)



# §7. Phép nhân các phân thức đại số

## 1. Quy tắc

Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

**Ví dụ.** Thực hiện phép nhân phân thức:

$$\frac{x^2}{2x^2 + 8x + 8} \cdot (3x + 6)$$

**Giải**

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{2x^2 + 8x + 8} \cdot (3x + 6) \\ &= \frac{x^2}{2x^2 + 8x + 8} \cdot \frac{(3x + 6)}{1} \\ &= \frac{x^2(3x + 6)}{2x^2 + 8x + 8} = \frac{x^2(3x + 6)}{2(x^2 + 4x + 4)} = \\ &= \frac{3x^2(x + 2)}{2(x + 2)^2} = \frac{3x^2}{2(x + 2)} \end{aligned}$$

## 2. Chú ý

Phép nhân các phân thức có các tính chất:

a) Giao hoán:  $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B}$

b) Kết hợp:

$$\left( \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \right) \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \left( \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} \right)$$

c) Phân phối đối với phép cộng:

$$\frac{A}{B} \cdot \left( \frac{C}{D} + \frac{E}{F} \right) = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}$$

# §8. Phép chia các phân thức đại số

## 1. Phân thức nghịch đảo

Hai phân thức được gọi là nghịch đảo của nhau nếu tích của chúng bằng 1.

Nếu  $\frac{A}{B} \neq 0$  thì  $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A} = 1$ , do đó:

+  $\frac{B}{A}$  là phân thức nghịch đảo của  $\frac{A}{B}$

+  $\frac{A}{B}$  là phân thức nghịch đảo của  $\frac{B}{A}$

## 2. Phép chia

*Quy tắc*

Muốn chia phân thức  $\frac{A}{B}$  cho phân thức  $\frac{C}{D}$  khác 0, ta nhân  $\frac{A}{B}$  với phân thức nghịch đảo của  $\frac{C}{D}$ :

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \text{ với } \frac{C}{D} \neq 0$$

# §9. Biến đổi các biểu thức hữu tỉ. Giá trị của phân thức

## 1. Biểu thức hữu tỉ

Các biểu thức  $0, -\frac{2}{5}, \sqrt{7},$

$(6x + 1)(x - 2), \frac{x}{3x^2 + 1}, \frac{\frac{2x}{x-1} + 2}{3}, \frac{2x}{x^2 - 1}$  là những biểu thức hữu tỉ.

## 2. Biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức

Nhờ các quy tắc của các phép cộng, trừ, nhân, chia các phân thức ta có thể biến đổi một biểu thức hữu tỉ thành một phân thức.

**Ví dụ 1.** Biến đổi biểu thức

$A = \frac{1 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$  thành một phân thức.

**Giải.**

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x} : \frac{x^2-1}{x} = \\ &= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{x^2-1} = \frac{(x+1).x}{x.(x^2-1)} = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

## 3. Giá trị của phân thức

Điều kiện xác định của phân thức là điều kiện của biến để mẫu thức khác 0.

**Ví dụ 2.** Cho phân thức  $\frac{3x-9}{x(x-3)}$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức  $\frac{3x-9}{x(x-3)}$  được xác định.

b) Tính giá trị của phân thức tại  $x = 2004$ .

**Giải**

a) ĐKXD:  $x(x-3) \neq 0$   
 $\Rightarrow x \neq 0$  và  $x-3 \neq 0$

Vậy  $x \neq 0$  và  $x \neq 3$

b) Ta có:

$$\frac{3x-9}{x(x-3)} = \frac{3(x-3)}{x(x-3)} = \frac{3}{x}$$

$x = 2004$  (thỏa mãn đkxđ)

Vậy giá trị của phân thức là:

$$\frac{3}{2004} = \frac{1}{668}$$